

CIRCUITOS DIGITAIS

Simplificação empregando mapa de karnaugh

Introdução

- **Mapa de karnaugh**
 - Emprega conceitos vistos anteriormente
 - Método de simplificação visual
 - Permite reduzir
 - O tamanho do circuito (Propriedades da álgebra booleanas)
 - O número de níveis a serem empregados (Soma de produtos e produtos de soma)
 - Complexidade é reduzida junto

Mapas de karnaugh

Um **mapa de Karnaugh** é a representação gráfica da tabela de verdade de uma função lógica.

	x	
	0	1
x	0	0
1	1	1

		x	
	y	0	1
	0	0	2
y	1	1	3

		x					
	z	xy		00	01	11	10
	0	0	2	6	4		
z	1	1	3	7	5		
		y					

		x					
	zw	xy		00	01	11	10
	00	0	4	12	8		
	01	1	5	13	9		
	11	3	7	15	11		
z	10	2	6	14	10		
		y					w

Mapa de Karnaugh

► FIGURE 4-21

A 3-variable Karnaugh map showing product terms.

		<i>C</i>	
		0	1
<i>AB</i>	00		
	01		
	11		
	10		

(a)

		<i>C</i>	
		0	1
<i>AB</i>	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
	01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
	11	$AB\bar{C}$	ABC
	10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

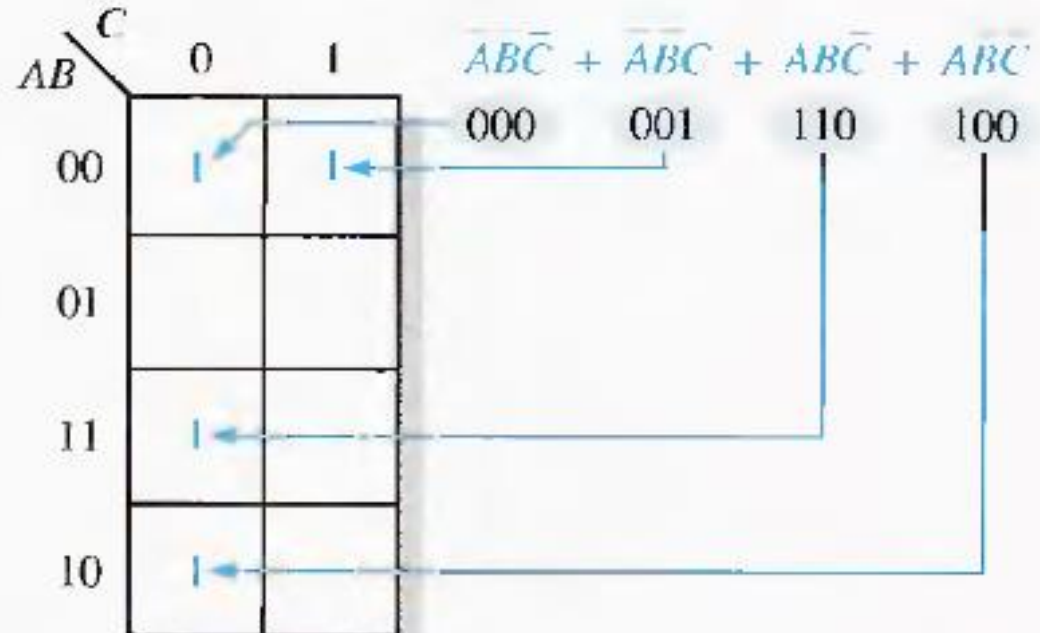
(b)

Como preencher a tabela com a expressão ?
 $a'b'c' + a'b'c + abc' + ab'c'$

Mapa de Karnaugh

▶ FIGURE 4-24

Example of mapping a standard SOP expression.



Mapa de Karnaugh

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00				
	01				
	11				
	10				

(a)

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}CD$
	01	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$
	11	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$
	10	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$

(b)

◀ **FIGURE 4-22**

A 4-variable Karnaugh map.

Como preencher a tabela com a expressão ?

$$a'b'c'd + a'b'cd + a'bc'd' + abc'd' + abc'd + abcd + ab'cd'$$

Mapa de Karnaugh

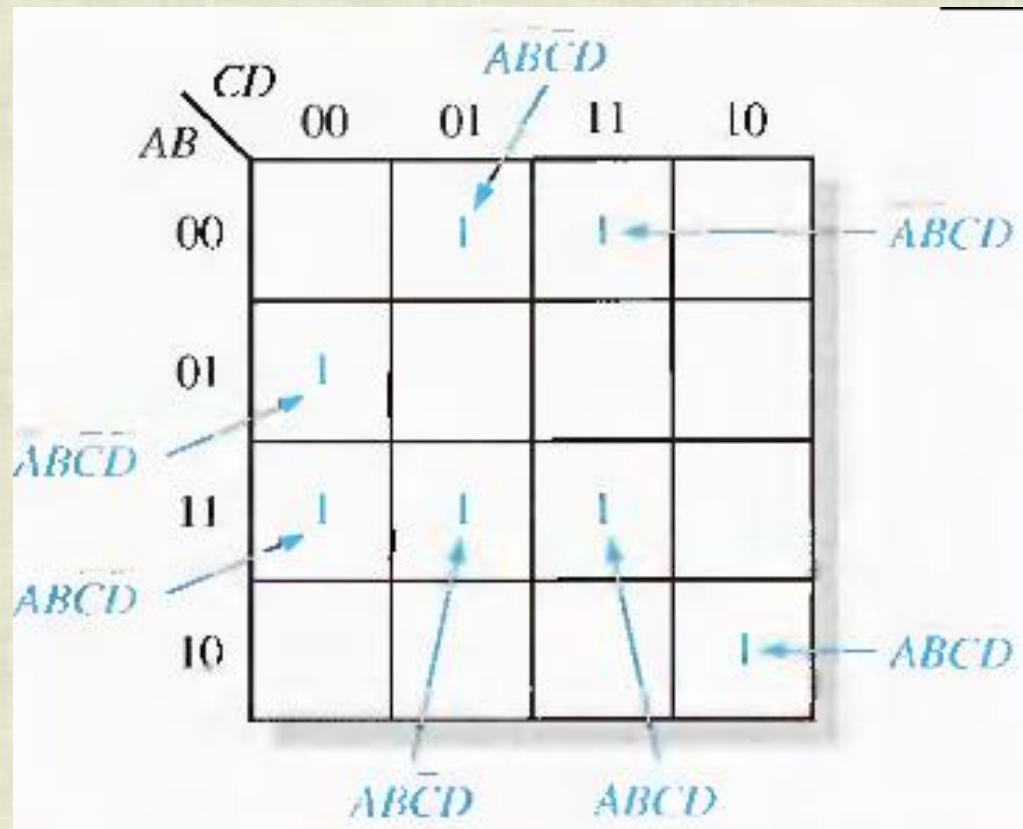


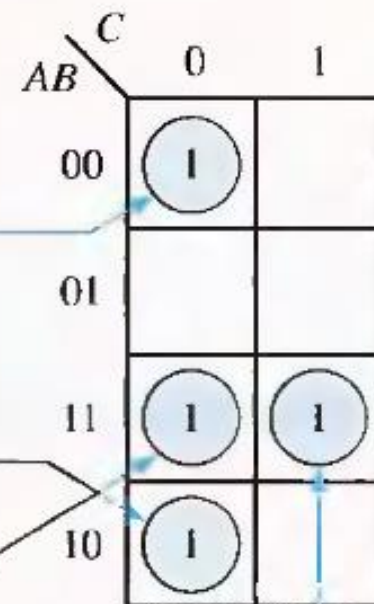
Tabela Verdade → Karnaugh

▶ **FIGURE 4-35**

Example of mapping directly from a truth table to a Karnaugh map.

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

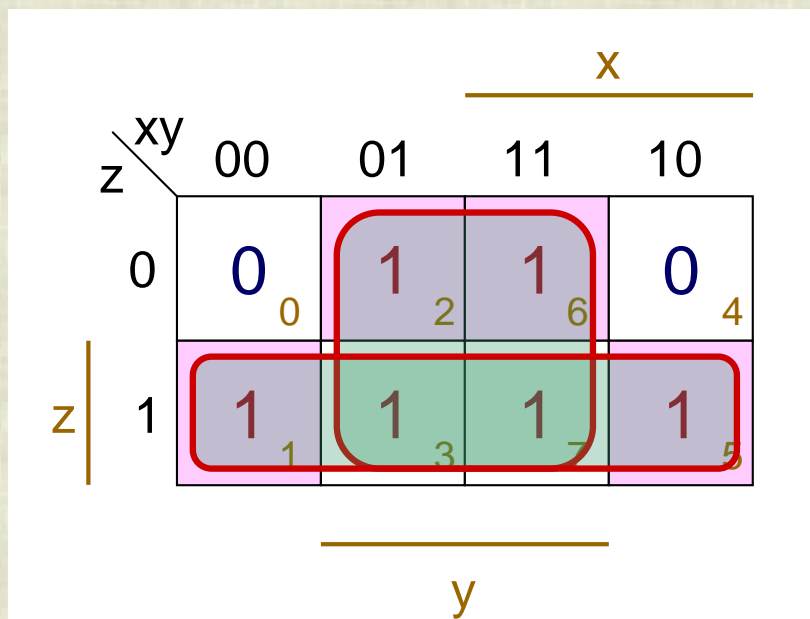
Inputs			Output
A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Método de Karnaugh (3 variáveis)

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot z + \bar{y} \cdot z + y \cdot \bar{z}$$

	x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



$$f(x, y, z) = y + z$$

Método de Karnaugh (4 variáveis)

	x	y	z	w	f(x,y,z,w)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

zw		x			
		00	01	11	10
z	00	0 ₀	0 ₄	1 ₁₂	0 ₈
	01	1 ₁	0 ₅	1 ₁₃	1 ₉
	11	1 ₃	0 ₇	0 ₁₅	1 ₁₁
	10	0 ₂	0 ₆	1 ₁₄	0 ₁₀
		y			

$$f(x, y, z, w) = \bar{y} \cdot w + x \cdot y \cdot \bar{w} + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

Como Agrupar ?

	<i>C</i>	0	1
<i>AB</i>			
00		1	1
01		1	0
11		1	1
10		1	1

	<i>C</i>	0	1
<i>AB</i>			
00		1	0
01		1	0
11		1	1
10		1	0

		<i>CD</i>	00	01	11	10
<i>AB</i>						
00			0	0	1	0
01			0	1	1	0
11			0	1	1	0
10			1	1	1	1

	<i>C</i>	0	1
<i>AB</i>			
00		1	1
01		1	0
11		1	0
10		1	1

		<i>CD</i>	00	01	11	10
<i>AB</i>						
00			0	1	1	0
01			0	1	0	0
11			0	1	0	1
10			1	1	1	0

		<i>CD</i>	00	01	11	10
<i>AB</i>						
00			0	1	0	1
01			0	0	1	1
11			1	0	1	1
10			1	0	0	1

Mapa de Karnaugh

- **Exercício em aula**

- Monte o mapa de Karnaugh para as seguintes expressões
- $A'BC + AB'C + AB'C'$
- $A'BCD' + ABCD' + ABC'D' + ABCD$
- $AC(B'+C)$

Limites

- Normalmente, não se usa Mapa de Karnaugh para resolução de problemas com mais de 6 variáveis, por ser extremamente difícil sua resolução.
- Entretanto o mapa de Karnaugh ainda é muito utilizado para até 6 variáveis de entrada.
- Para 5 e 6 variáveis, a forma de representação por Mapa de Karnaugh é feita utilizando a teoria da superposição.

Método de Karnaugh (5 variáveis)

a=0

de		bc			
		00	01	11	10
d	00	0 ₀	0 ₄	0 ₁₂	0 ₈
	01	0 ₁	0 ₅	0 ₁₃	0 ₉
	11	1 ₃	1 ₇	1 ₁₅	1 ₁₁
	10	0 ₂	1 ₆	1 ₁₄	0 ₁₀

Diagram showing Karnaugh map for a=0. The map is a 4x4 grid with rows labeled 'de' and columns labeled 'bc'. The values are 0 or 1. A red dashed line highlights a group of 4 cells (11, 10, 11, 10) and a purple dashed line highlights a group of 4 cells (11, 10, 11, 10). A vertical bracket on the right is labeled 'e'.

$$f(a,b,c,d,e) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot d \cdot e + \bar{a} \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot d \cdot e + a \cdot d \cdot e + a \cdot d \cdot c \cdot \bar{e}$$

2 implicantes primos

8 células distintas

2 implicantes primos essenciais

a=1

de		bc			
		00	01	11	10
d	00	0 ₁₆	0 ₂₀	0 ₂₈	0 ₂₄
	01	0 ₁₇	0 ₂₁	0 ₂₉	0 ₂₅
	11	1 ₁₉	1 ₂₃	1 ₃₁	1 ₂₇
	10	0 ₁₈	1 ₂₂	1 ₃₀	0 ₂₆

Diagram showing Karnaugh map for a=1. The map is a 4x4 grid with rows labeled 'de' and columns labeled 'bc'. The values are 0 or 1. A red dashed line highlights a group of 4 cells (11, 10, 11, 10) and a purple dashed line highlights a group of 4 cells (11, 10, 11, 10). A vertical bracket on the right is labeled 'e'.

$$f(a,b,c,d,e) = d \cdot e + c \cdot d$$

Mapa de Karnaugh (5 variáveis)

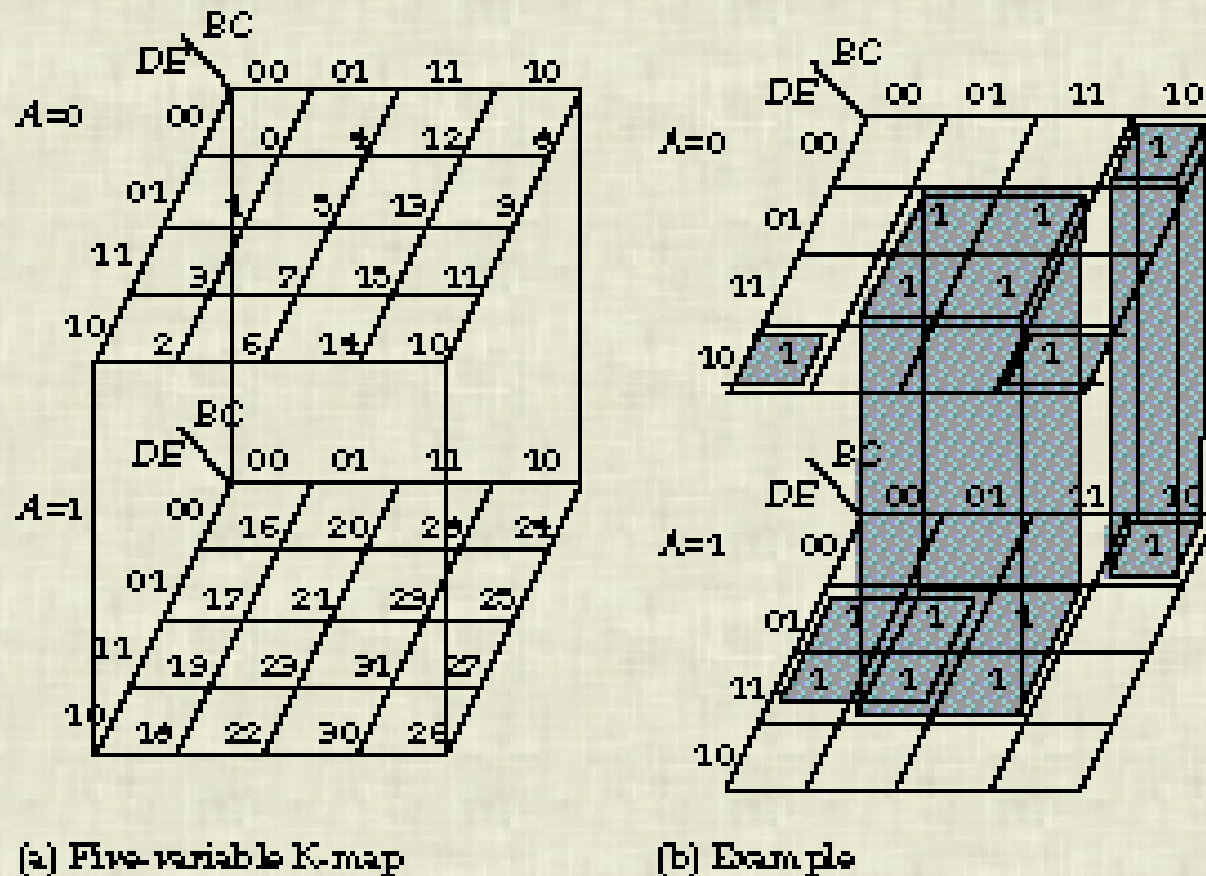
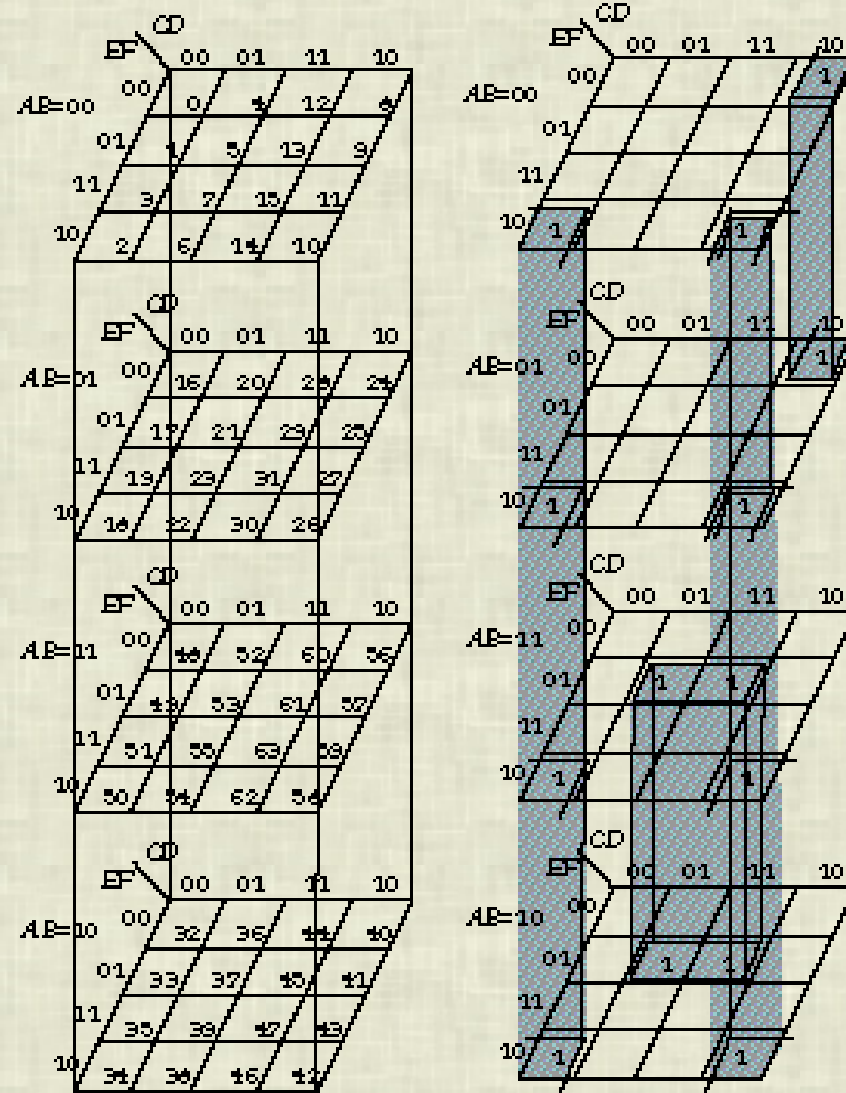


Figure 1.51 Five-variable K-map and example.

Mapa de Karnaugh (6 variáveis)



(a) Six-variable K-map

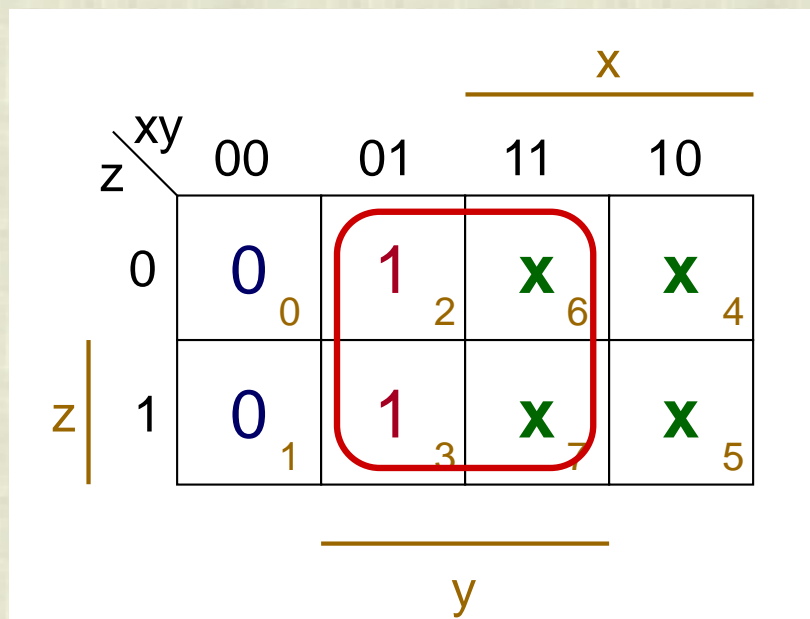
(b) Example

Figure 2.52 Six-variable K-map and example.

Condições irrelevantes (Don't care)

No mapa de Karnaugh as combinações irrelevantes deverão assumir valores que permitem reduzir o número de literais em cada um dos implicantes primos (i.e. permitem aumentar as dimensões de cada conjunto de 2^n células).

	x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	x
5	1	0	1	x
6	1	1	0	x
7	1	1	1	x



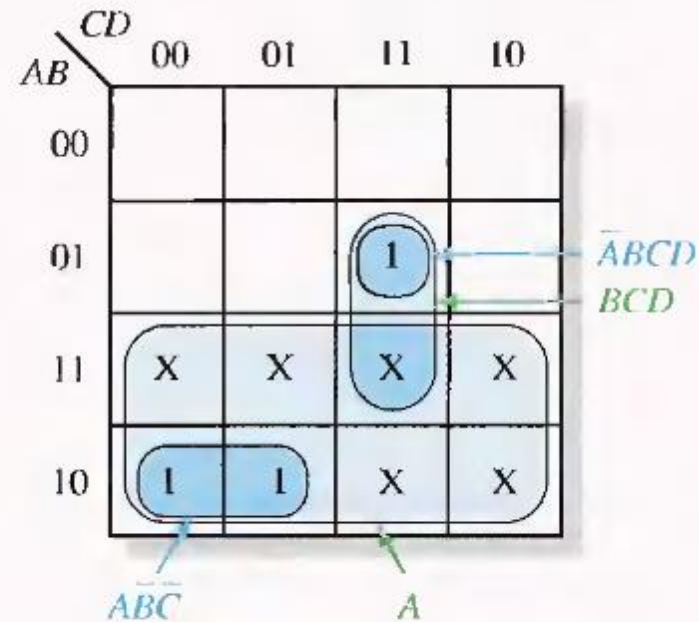
$$f(x, y, z) = y$$

Condições irrelevantes (Don't care)

Inputs	Output
<i>ABCD</i>	<i>Y</i>
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	X
1 0 1 1	X
1 1 0 0	X
1 1 0 1	X
1 1 1 0	X
1 1 1 1	X

(a) Truth table

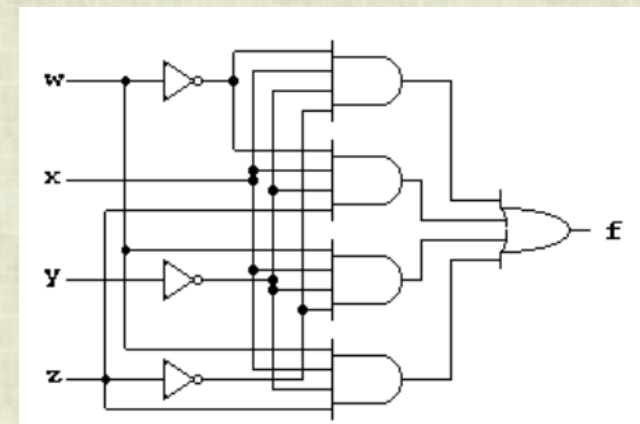
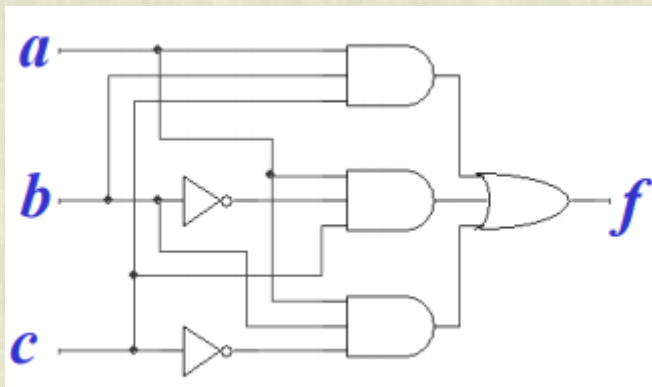
Don't cares



(b) Without "don't cares" $Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BCD$
 With "don't cares" $Y = A + BCD$

Exercícios

- **Projetar um circuito simplificado que caracterize um elevador da seguinte forma:**
 - M sinaliza que o elevador está em movimento (1) ou parado (0)
 - O prédio possui 3 andares (A1, A2 e A3)
 - O sistema deve reconhecer a presença do elevador no andar (1) ou não (0)
 - A saída P deve indicar que a porta pode ser aberta (1) sempre que elevador estiver parado em um dado andar.
- **Tente simplificar os seguintes circuitos aplicando karnaugh**



Referências úteis

- **Limitações de Mapas de Karnaugh**
 - Difícil lidar com funções com mais de 4 variáveis.
 - 5 e 6 variáveis é factível, mas complexo
 - Difícil de automatizar !!!
- **Outras referências**
 - <https://www.youtube.com/watch?v=73xFPHTsCFk>
(simplificação booleana)
 - <https://www.youtube.com/watch?v=luMHYC6UQ1o>
(Karnaugh português)
 - <https://www.youtube.com/watch?v=A0XupfXiKIo>
(Karnaugh em inglês)
- **Simuladores e Ferramentas Computacionais**
 - <http://goo.gl/sl8s0S> (Karma)
 - <http://sontrak.com/> (Logic Friday – Boolean logic optimization)